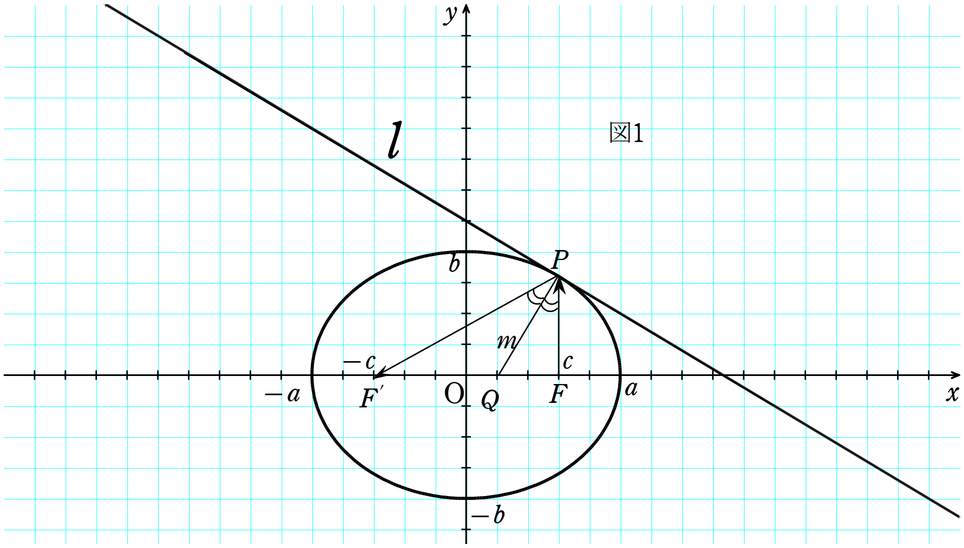
2次曲線の焦点の性質を考える

◎　楕円の焦点の性質を証明する

「楕円の，一方の焦点 (F または F') を発した光線が楕円に当たって反射すると，すべて他方の焦点 (F' または F) に集まる…… $(*)$」という性質を証明しよう。



証明　図1　は，方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ で表される楕円 E であり，E 上の点 $P(x_1,\ y_1)$ において $(x_1\neq 0,\ y_1\neq 0)$，接線 l ：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ ……① が引かれている。

点 P における法線 m と x 軸の交点を Q とする。すなわち，$m\perp l$。 $(*)$ と同値である

<u>$\angle FPQ=\angle F'PQ$ を示す。</u> $F(c,\ 0)$，$F'(-c,\ 0)$ とすると，楕円の定義より，$c=\sqrt{a^2-b^2}$

m の方程式は，$\dfrac{y_1}{b^2}(x-x_1)-\dfrac{x_1}{a^2}(y-y_1)=0$ …②　となり，② で $y=0$ とすると，

$\dfrac{y_1}{b^2}(x-x_1)=-\dfrac{x_1y_1}{a^2} \Leftrightarrow x=x_1-\dfrac{b^2x_1}{a^2}=\dfrac{(a^2-b^2)x_1}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}x_1$，よって $Q\left(\dfrac{c^2}{a^2}x_1,\ 0\right)$，

$F'Q=\dfrac{c^2}{a^2}x_1-(-c)=\dfrac{c}{a}\left(a+\dfrac{c}{a}x_1\right)$，$FQ=c-\dfrac{c^2}{a^2}x_1=\dfrac{c}{a}\left(a-\dfrac{c}{a}x_1\right)$ ……③

一方，$F'P^2-FP^2=(x_1+c)^2+{y_1}^2-\{(x_1-c)^2+{y_1}^2\}=4cx_1$ ……④，　ところが，

左辺$=(F'P+FP)(F'P-FP)$，　定義より，$F'P+FP=2a$ ……⑤

④，⑤より，$F'P-FP=\dfrac{2cx_1}{a}$ ……⑥，$\dfrac{⑤+⑥}{2}$ より，$F'P=a+\dfrac{c}{a}x_1$ ……⑦，

$\dfrac{⑤-⑥}{2}$ より，$FP=a-\dfrac{c}{a}x_1$ …⑧，よって，③,⑦,⑧より，$F'P:FP=F'Q:FQ$

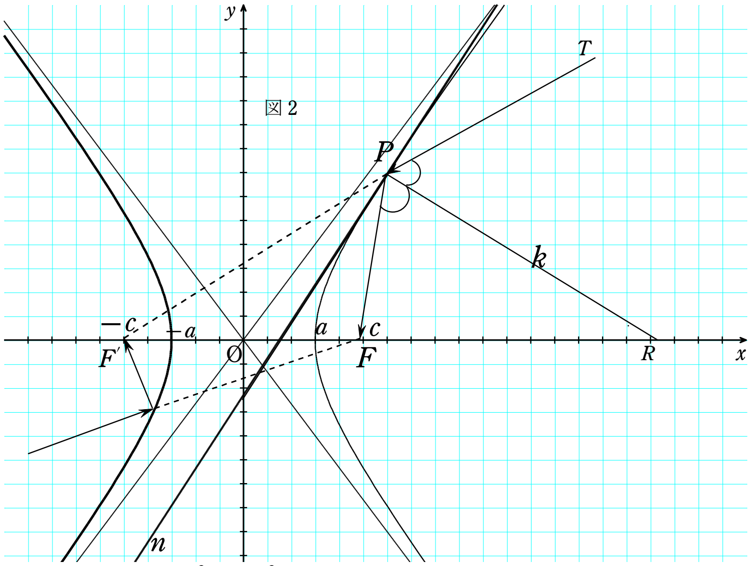
したがって，「角の二等分線の定理の逆」によって，　$\angle FPQ=\angle F'PQ$　終

$x_1=0$ のときは対称性により $(*)$ を示すことができ，$y_1=0$ のときは明らかに $(*)$ となる。

山脇の超数学講座 No. 36

◎　双曲線の焦点の性質を証明する

双曲線の「一方の焦点 (F または F') に向かって進む光線が双曲線に当たって反射すると，すべて他方の焦点 (F' または F) に集まる…… (＊＊) 」という性質を証明しよう。



証明　図 2 は，方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で表される双曲線 H であり，H 上の点 $P(x_1,\ y_1)$ において $(x_1\fallingdotseq 0,\ y_1\fallingdotseq 0)$ ，接線 n ： $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ ……⑨ が引かれている。

点 P における法線 k と x 軸の交点を R とする。すなわち，$k\perp n$ 。また，直線 $F'P$ の点 Pの延長上に，図のように点 T をとる。 (＊＊) と同値である <u>$\angle FPR=\angle TPR$ を示す。</u>

$F(c,\ 0)$，$F'(-c,\ 0)$ とすると，双曲線の定義より，$c=\sqrt{a^2+b^2}$ ，　k の方程式は，

$\dfrac{y_1}{b^2}(x-x_1)+\dfrac{x_1}{a^2}(y-y_1)=0$ ……⑩　となり，　⑩ で $y=0$ とすると，

$\dfrac{y_1}{b^2}(x-x_1)=\dfrac{x_1y_1}{a^2} \iff x=x_1+\dfrac{b^2x_1}{a^2}=\dfrac{(a^2+b^2)x_1}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}x_1$，よって，$R\left(\dfrac{c^2}{a^2}x_1,\ 0\right)$，

$F'R=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{c}{a}x_1+a\right)$，$FR=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{c}{a}x_1-a\right)$ ……⑪　一方，$F'P^2-FP^2=4cx_1$ ……⑫，

左辺 $=(F'P+FP)(F'P-FP)$ ，　定義より，$F'P-FP=2a$ ……⑬（図 2 の場合）

⑫，⑬より，　$F'P+FP=\dfrac{2cx_1}{a}$ ……⑭，　$\dfrac{⑬+⑭}{2}$ より，$F'P=\dfrac{c}{a}x_1+a$ ……⑮，

$\dfrac{⑭-⑬}{2}$ より，$FP=\dfrac{c}{a}x_1-a$ …⑯，よって，⑪,⑮,⑯より，$F'P:FP=F'R:FR$

「角の二等分線の定理の逆（外分と外角の場合）」によって，$\angle FPR=\angle TPR$

この場合，$|x_1|>a$ より，$x_1\fallingdotseq 0$ であり，$y_1=0$ のときは明らかに (＊＊) となる。

また，$FP-F'P=2a$ となる場合も，上と同様に証明できる。　終

解説　楕円と双曲線の対称性，登場する式の共通性,「角の二等分線の定理の逆」による証明の完結という醍醐味がある。平面幾何の定理と座標幾何学の併用による証明であった。